FORMULARIO VIBRACIONES

Ecuación diferencial: $m_e\ddot{x}+c_e\dot{x}+k_e x = f(t)$ adimensional: $\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2 x = f(t)/m$

Respuesta: $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$

con : $\omega_n = \dfrac{2\pi}{\tau_n}$ $\omega_n = 2\pi f_n$ $\omega_n=\sqrt{\dfrac{k_e}{m_e}}$ $\zeta=\dfrac{c_e}{2\sqrt{m_e k_e}}$ $\omega_a=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

VIBRACIONES LIBRES: $x(t)=x_h(t)$

Sistema no amortiguado: $\zeta=0$

$x(t)=A\,\mathbf{sen}(\omega_n t)+B\cos(\omega_n t)$ $A=\dfrac{\dot{x}(0)}{\omega_n}$ $B=x(0)$

Sistema subamortiguado: $0<\zeta<1$

$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\,\mathbf{sen}(\omega_a t)+B\cos(\omega_a t)\right)$ $A=\dfrac{\dot{x}(0)+\zeta\omega_n x(0)}{\omega_a}$ $B=x(0)$

Decremento logarítmico $\Delta=\ln\dfrac{x_i}{x_j}=\dfrac{2\pi n\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ $\zeta=\dfrac{\Delta}{\sqrt{(2\pi n)^2+\Delta^2}}$

Sistema Críticamente amortiguado: $\zeta=1$

$x(t)=\left[A+Bt\right]e^{-\zeta\omega_n t}$ $A=x(0)$ $B=\dot{x}(0)+\omega_n x(0)$

Sistema Sobreamortiguado: $\zeta>1$

$x(t)=Ae^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}+Be^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$ $A=\dfrac{\dot{x}(0)+(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n x(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$ $B=\dfrac{-\dot{x}(0)-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n x(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$

VIBRACIONES FORZADAS EN REGIMEN PERMANENTE: $x(t)=x_p(t)$

Coef. de amplitud dinámico Coef. de transmisibilidad: Relación entre frecuencias

$\mathrm{K}=\dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ $\tau=\dfrac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ $r=\dfrac{\Omega}{\omega_n}$

Vibraciones por excitación armónica: $m_e\ddot{x}+c_e\dot{x}+k_e x=F_o\cos(\Omega t)$

$x(t)=X_m\cos(\Omega t-\varphi)$ $X_m=\dfrac{F_o}{k_e}\mathrm{K}$ $\tan\varphi=\dfrac{2\zeta r}{1-r^2}$ $r_{crit}=\sqrt{1-2\zeta^2}$

Fuerza transmitida a la Fundación: $F_T=c\dot{x}(t)+kx(t)$

$F_T=F_{T\max}\cos(\Omega t-\varphi-\phi)$ $F_{T\max}=F_o\tau$ $\tan\varphi=\dfrac{2\zeta r}{1-r^2}$ $\tan\phi=2\zeta r$

Vibraciones por masa desbalanceada: $M_e\ddot{x}+c_e\dot{x}+k_e x=me\Omega^2\sin(\Omega t)$

$x(t)=X_m\sin(\Omega t-\varphi)$ $X_m=\dfrac{me\Omega^2}{k_e}\mathrm{K}=\dfrac{me}{M_e}r^2\mathrm{K}$ $\tan\varphi=\dfrac{2\zeta r}{1-r^2}$ $r_{crit}=\dfrac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$

Fuerza transmitida a la Fundación: $F_T=c\dot{x}(t)+kx(t)$

$F_T=F_{T\max}\cos(\Omega t-\varphi-\phi)$ $F_{T\max}=F_o\tau$ $F_{T\max}=me\Omega^2\tau=me\omega_n^2 r^2\tau$

Vibraciones por centro de masa desbalanceado: $M_e\ddot{x}+c_e\dot{x}+k_e x=M_e e\Omega^2\sin(\Omega t)$

$x(t)=X_m\sin(\Omega t-\varphi)$ $X_m=\dfrac{M_e e\Omega^2}{k_e}\mathrm{K}$ $X_m=er^2\mathrm{K}$

Fuerza transmitida a la Fundación:

$F_T=c\dot{x}(t)+kx(t)$ $F_T=F_{T\max}\cos(\Omega t-\varphi-\phi)$ $F_{T\max}=M_e e\omega_n^2 r^2\tau$

Vibraciones por movimiento de la base: $Y=Y_m\sin(\Omega t)$**:**

Coor.absoluta x:

$m_e\ddot{x}+c_e(\dot{x}-\dot{y})+k_e(x-y)=0$ $m_e\ddot{x}+c_e\dot{x}+k_e x=k_e y+c_e\dot{y}$

Coor. relativa z:

$m_e\ddot{x}+c_e(\dot{x}-\dot{y})+k_e(x-y)=0$ $m_e\ddot{z}+c_e\dot{z}+k_e z=-m_e\ddot{y}$

VIBRACIONES TRANSITORIAS: $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$

Si se utiliza Laplace: $x(t)=L^{-1}\left[H(s)F(s)\right]+x_{CI}(t)$ con $H(s)=\dfrac{1}{(ms^2+cs+k)}$

Vibraciones por fuerzas no periódicas:

Respuesta a un impulso unitario $f(t)=\delta(t)$ $F(s)=1$

$h(t)=\dfrac{1}{m\omega_a}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_a t$ si $\zeta=0$ $h(t)=\dfrac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$

Respuesta a un escalón unitario $f(t)=u(t)$ $F(s)=1/s$

$g(t)=\dfrac{1}{k}\left[1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_a t+\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_a t\right)\right]$ si $\zeta=0$ $g(t)=\dfrac{1}{k}\left[1-\cos\omega_n t\right]$

Respuesta a una rampa de pendiente unitaria, $f(t)=t$ $F(s)=1/s^2$

$r(t)=\dfrac{1}{k}\left[t-\dfrac{2\zeta}{\omega_n}+e^{-\zeta\omega_n t}\left(\dfrac{2\zeta}{\omega_n}\cos(\omega_a t)+\dfrac{2\zeta^2-1}{\omega_a}\sin(\omega_a t)\right)\right]$ si $\zeta=0$ $r(t)=\dfrac{1}{k}\left[t-\dfrac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$

Respuesta a las Condiciones Iniciales:

$x_{CI}(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\left(\dfrac{\dot{x}(0)+\zeta\omega_n x(0)}{\omega_a}\mathbf{sen}(\omega_a t)+x(0)\cos(\omega_a t)\right)$

Integral de Convolución:

$x(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ $x(t)=\int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau$

Integral de Duhamel:

$x(t)=f(0)g(t)+\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau$